Myślenie matematyczne

Twój nowy sposób pojmowania świata

Dr Keith Devlin

Helion

Tytuł oryginału: Introduction to Mathematical Thinking

Tłumaczenie: Tomasz Walczak

ISBN: 978-83-283-4814-1

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: *helion@helion.pl*
WWW: *http://helion.pl* (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
http://helion.pl/user/opinie/mysmat
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Printed in Poland.

Spis treści

Rozdział 1.

Czym jest matematyka?

W czasie, jaki szkoły przeznaczają na naukę matematyki, bardzo niewiele (jeśli w ogóle) zajęć poświęca się na próbę wytłumaczenia, czego dotyczy ten przedmiot. Zamiast tego nacisk położony jest na uczenie i stosowanie różnych procedur rozwiązywania problemów matematycznych. To trochę tak, jakby opisywać piłkę nożną jako „serię manewrów nakierowanych na umieszczenie piłki w bramce". Jest to precyzyjny opis pewnych kluczowych zagadnień, który jednak nie uwzględnia odpowiedzi na ogólne pytania „co?" i „jak?".

Jeśli wziąć pod uwagę wymagania programowe, mogę zrozumieć, jak dochodzi do takiej sytuacji. Uważam jednak, że jest to błędne podejście. W dzisiejszym świecie ogólne zrozumienie natury, zakresu, możliwości i ograniczeń matematyki jest przydatne dla każdego człowieka[1]. Przez lata spotkałem wiele osób, które uzyskały dyplomy z tak wysoce matematycznych dziedzin jak inżynieria, fizyka, informatyka, a nawet sama matematyka, i mówiły mi, że przez cały okres edukacji szkolnej i uniwersyteckiej nie zdobyły dobrego ogólnego pojęcia na temat tego, czym jest współczesna matematyka. Dopiero później zdarzało im się uchwycić jakiś aspekt prawdziwej natury tej dziedziny i docenić jej dominującą rolę we współczesnym świecie[2].

---

1 Jeśli jeszcze tego nie zrobiłeś, cofnij się i przeczytaj wprowadzenie do tej książki. Jest ono bardzo ważne w tym miejscu i w dalszych częściach książki.

2 Patrz poprzedni przypis.

1.1. Więcej niż arytmetyka

Większość elementów matematyki stosowanych obecnie w naukach ścisłych i inżynierii ma nie więcej niż 300 – 400 lat, a liczne aspekty mają mniej niż 100 lat. Jednak typowy program nauczania w liceum obejmuje matematykę starszą; niektóre jej elementy mają ponad 2000 lat!

Nie ma niczego złego w nauczaniu tak dawnych rzeczy. „Jeśli coś działa, nie trzeba tego zmieniać”. Algebra, jaką arabskojęzyczni handlarze opracowali w VIII i IX w. (słowo *algebra* pochodzi od arabskiego *al-jabr*, co oznacza „przywrócenie” lub „ponowne połączenie rozłączonych części”) w celu zwiększenia efektywności transakcji biznesowych, pozostaje dziś równie przydatna i ważna jak wtedy, choć obecnie możemy stosować ją za pomocą makr w arkuszach kalkulacyjnych, a nie — jak w średniowieczu — przy użyciu obliczeń na palcach. Jednak czasy się zmieniają i w społeczeństwie zachodzą postępy. W tym procesie powstaje potrzeba nowej matematyki, która — w odpowiednim momencie — zostaje zrealizowana. System edukacji musi za tym nadążać.

Można powiedzieć, że matematyka zaczęła się wraz z wynalezieniem liczb i arytmetyki. Uważa się, że miało to miejsce 10 000 lat temu w momencie wprowadzenia pieniędzy. Naprawdę, prawdopodobnie matematyka pojawiła się wraz z pieniędzmi!

W kolejnych wiekach starożytni Egipcjanie i Babilończycy poszerzyli tę dziedzinę o geometrię i trygonometrię[3]. W tych cywilizacjach matematyka pełniła głównie funkcje użytkowe i miała charakter „książki kucharskiej”: „zrób to i to z liczbą lub figurą geometryczną, a otrzymasz wynik”.

Okres od ok. 500 r. p.n.e. do 300 r. n.e. to era matematyki greckiej. Matematycy w starożytnej Grecji wyjątkową uwagę poświęcali geome-

3 Także inne cywilizacje (np. Chińczycy i Japończycy) rozwijały matematykę. Jednak matematycy z owych kultur nie mieli bezpośredniego wpływu na rozwój współczesnej zachodniej matematyki, dlatego w tej książce pomijam ich wkład.

trii. Traktowali liczby geometrycznie, jako miary długości, a gdy odkryli, że istnieją długości, którym nie odpowiadają znane ówcześnie liczby (można to uznać za odkrycie liczb niewymiernych), w znacznym stopniu zaprzestali badań nad liczbami[4].

To Grecy przekształcili matematykę w naukę (a nie tylko zestaw technik do pomiarów, obliczeń i rachunkowości). Około 500 r. p.n.e. Tales z Miletu (obecnie Milet należy do Turcji) przedstawił pomysł, że precyzyjnie opisane założenia matematyczne można logicznie udowodnić za pomocą formalnego rozumowania. Ta innowacja oznaczała narodziny twierdzeń będących obecnie podstawą matematyki. Kulminacją takiego formalnego podejścia Greków była praca *Elementy* Euklidesa, uznawana za najbardziej rozpowszechnianą po Biblii książkę wszech czasów[5].

Matematyka szkolna jest w dużym stopniu oparta na wymienionych wcześniej osiągnięciach oraz na tylko dwóch późniejszych innowacjach pochodzących z XVII w.: analizie matematycznej i teorii prawdopodobieństwa. Do klas szkolnych nie trafiły praktycznie żadne odkrycia z ostatnich 300 lat. Jednak większość matematyki wykorzystywanej w dzisiejszym świecie została opracowana w ciągu ostatnich 200 lat, a już na pewno w ostatnich 300 latach!

Dlatego osoby, których wizja matematyki jest ograniczona do zagadnień uczonych w szkołach, zapewne nie zdają sobie sprawy, że badania w dziedzinie matematyki to kwitnąca, rozwijana na całym świecie dyscyplina. Nie wierzą też w to, że matematyka przenika — często w istotnym stopniu — większość obszarów dzisiejszego życia i społeczeństwa. Takie osoby przykładowo zwykle nie wiedzą, która organizacja

4 Często przytaczana jest historia o tym, że młody grecki matematyk, który dokonał tego odkrycia, został zabrany na morze i utopiony, aby okropne wnioski, do jakich doszedł, nie zostały ujawnione. Z tego, co wiem, nie ma żadnych dowodów potwierdzających tę zmyśloną historyjkę (a szkoda, bo jest bardzo ciekawa).

5 Jeśli wziąć pod uwagę dzisiejsze tanie publikacje z rynku masowego, w definicji określenia „najbardziej rozpowszechnianych” zapewne trzeba uwzględnić liczbę lat, przez jakie książka była w obiegu.

w Stanach Zjednoczonych zatrudnia największą liczbę doktorów matematyki. Prawie na pewno jest to Agencja Bezpieczeństwa Narodowego (ang. *National Security Agency* — **NSA**), choć dokładne liczby oficjalnie pozostają tajne. Większość z tych matematyków pracuje nad łamaniem szyfrów, aby umożliwić agencji odczytywanie zaszyfrowanych wiadomości przechwytywanych przez systemy monitorowania. Przynajmniej tak się ogólnie uważa, przy czym agencja tego nie potwierdza. Choć wielu Amerykanów zapewne wie, że NSA stara się łamać szyfry, mało kto zdaje sobie sprawę, że wymaga to matematyki. Dlatego liczni Amerykanie nie myślą o NSA jako o organizacji zatrudniającej dużą liczbę zaawansowanych matematyków.

W ciągu mniej więcej ostatnich 100 lat nastąpił gwałtowny wzrost liczby obszarów matematyki. Na początku XX w. można było przyjąć, że matematyka składa się z kilkunastu działów: arytmetyki, geometrii, analizy matematycznej i kilku innych. Dziś liczba różnych obszarów matematyki wynosi ok. 60 – 70 (w zależności od tego, jak je liczyć). Niektóre dziedziny, np. algebra i topologia, zostały podzielone na różne poddziedziny. Inne, takie jak teoria złożoności obliczeniowej lub teoria systemów dynamicznych, stanowią zupełnie nowe obszary nauki.

Ten gwałtowny rozwój matematyki doprowadził w latach 80. ubiegłego wieku do powstania jej nowej definicji, zgodnie z którą matematyka to *nauka o wzorcach*. Wedle tego opisu matematycy identyfikują i analizują abstrakcyjne wzorce związane z liczbami, kształtami, ruchem, zachowaniami, głosowaniem w populacji, powtarzalnością zdarzeń losowych itd. Te wzorce mogą być prawdziwe lub wyimaginowane, wizualne lub umysłowe, statyczne lub dynamiczne, jakościowe lub ilościowe, utylitarne lub nie itd. Mogą one powstawać w otaczającym nas świecie, w wyniku uprawiania nauki lub na podstawie wewnętrznych mechanizmów ludzkiego umysłu. Różne rodzaje wzorców są podstawą dla różnych gałęzi matematyki. Oto przykłady:

- Arytmetyka i teoria liczb dotyczą badań nad wzorcami liczb i liczenia.
- Geometria dotyczy wzorców w kształtach.

- Analiza matematyczna pozwala badać wzorce ruchu.
- Logika dotyczy wzorców wnioskowania.
- Teoria prawdopodobieństwa dotyczy wzorców prawdopodobieństwa.
- Topologia służy do badania wzorców bliskości i pozycji obiektów.
- Geometria fraktalna służy do badania samopodobieństwa występującego w świecie naturalnym.

1.2. Notacja matematyczna

Jednym z aspektów współczesnej matematyki, który jest oczywisty nawet dla przypadkowego obserwatora, jest posługiwanie się abstrakcyjną notacją, skomplikowanie wyglądającymi wzorami i diagramami geometrycznymi. Korzystanie przez matematyków z abstrakcyjnej notacji odzwierciedla abstrakcyjną naturę wzorców, jakie analizują.

Różne aspekty rzeczywistości wymagają różnych form opisu. Przykładowo najlepszym sposobem analizowania położenia ziem lub opisywania komuś drogi w nieznanym mieście jest narysowanie mapy. Tekst nadaje się do tego znacznie gorzej. Analogicznie opatrzone uwagami rysunki (schematy) to najbardziej odpowiedni sposób przedstawiania konstrukcji budynku, a do reprezentowania muzyki na papierze najlepiej nadaje się zapis nutowy. Dla różnego rodzaju abstrakcyjnych wzorców formalnych i abstrakcyjnych struktur najlepszym środkiem opisu i analizy jest matematyka oraz powiązane z nią notacje, pojęcia i procedury.

Przykładowo prawo przemienności dla dodawania można zapisać po polsku tak:

Gdy dodawane są dwie liczby, ich kolejność nie ma znaczenia.

Jednak zwykle zapisuje się je w postaci symbolicznej:

$$m + n = n + m$$

Choć ta postać symboliczna w tego rodzaju prostym przykładzie nie ma istotnych zalet, to w większości wzorców matematycznych poziom złożoności i abstrakcji jest tak duży, że stosowanie czegokolwiek innego niż notacja symboliczna byłoby nieakceptowalnie niewygodne. Dlatego wraz z rozwojem matematyki w coraz większym stopniu wykorzystywane są notacje abstrakcyjne.

Choć wprowadzenie matematyki symbolicznej w jej współczesnej postaci zwykle przypisuje się żyjącemu w XVI w. francuskiemu matematykowi François Viète'owi, notację algebraiczną po raz pierwszy zastosowano w pracy Diofantosa, który żył w Aleksandrii ok. 250 r. n.e. Jego 13-tomowy traktat *Arytmetyka* (przetrwało z niego tylko sześć tomów) powszechnie uznaje się za pierwszy podręcznik algebry. Diofantos posługiwał się specjalnymi symbolami do oznaczania niewiadomych w równaniu i potęg niewiadomych. Stosował też symbole dla odejmowania i równości.

Dziś książki matematyczne są zwykle pełne symboli, jednak notacja matematyczna nie jest matematyką (podobnie jak notacja muzyczna nie jest muzyką). Strona z nutami *reprezentuje* utwór muzyczny. Sama muzyka powstaje, gdy nuty z takiej strony są śpiewane lub wykonywane na instrumencie muzycznym. To dzięki wykonaniu muzyka ożywa i możemy jej doświadczać. Muzyka istnieje nie na zadrukowanej stronie, ale w naszych umysłach. To samo dotyczy matematyki. Symbole na stronie jedynie *reprezentują* matematykę. Gdy są odczytywane przez kompetentnego wykonawcę (w tym przypadku jest nim osoba o wykształceniu matematycznym), symbole z danej strony ożywają. Matematyka żyje i oddycha w umyśle czytelnika, jakby była abstrakcyjną symfonią.

Warto powtórzyć, że powodem stosowania abstrakcyjnej notacji jest abstrakcyjna natura wzorców, jakie matematyka pomaga nam identyfikować i badać. Matematyka jest nam niezbędna np. do zrozumienia niewidocznych wzorców rządzących wszechświatem. W 1623 r. Galileusz napisał:

*Wielka księga natury może zostać odczytana tylko
przez tych, którzy znają język, w jakim jest napisana.
A tym językiem jest matematyka*[6].

Fizykę można precyzyjnie opisać jako wszechświat widziany z perspektywy matematyki.

Oto tylko jeden z wielu przykładów: dzięki zastosowaniu matematyki do sformułowania i zrozumienia praw fizyki obecnie możemy podróżować samolotami. Gdy samolot odrzutowy przelatuje nam nad głowami, nie widzimy niczego, co go podtrzymuje. Tylko dzięki matematyce możemy „dostrzec" niewidoczne siły, które utrzymują maszynę w górze. Te siły zostały odkryte przez Isaaca Newtona w XVII w. Opracował on także matematykę potrzebą do badania tych sił, choć musiało minąć kilka wieków, aby technologia rozwinęła się na tyle, by matematykę Newtona (wzbogaconą o wiele rozwiniętych w międzyczasie dodatkowych matematyk) można było wykorzystać do budowania samolotów. Jest to tylko jedna z ilustracji jednego z moich ulubionych memów opisujących, do czego służy matematyka: *sprawia, że niewidzialne staje się widzialne*.

1.3. Współczesna matematyka na poziomie uniwersyteckim

Po tym krótkim omówieniu historycznego rozwoju matematyki można rozpocząć objaśnianie, w czym współczesna matematyka uniwersytecka różni się w istotny sposób od matematyki nauczanej w szkołach.

Jeszcze ok. 150 lat temu matematycy, choć dawno rozszerzyli już wtedy królestwo badanych obiektów poza liczby (i reprezentujące je symbole algebraiczne), nadal uważali, że w matematyce ważne są przede wszystkim *obliczenia*. Oznacza to, że biegłość w matematyce była

6 Z *Il Saggiatore* (*Waga probiercza*). Jest to parafraza słów wypowiedzianych przez Galileusza.

postrzegana jako umiejętność wykonywania obliczeń lub operowania wyrażeniami symbolicznymi w celu rozwiązania problemu. Matematyka na poziomie liceum nadal w dużym stopniu jest zgodna z tym dawnym podejściem.

Jednak gdy w XIX w. matematycy rozwiązywali coraz bardziej złożone problemy, zaczęli odkrywać, że wcześniejsze intuicje dotyczące matematyki są nieodpowiednie do wykonywania ich pracy. Nieintuicyjne (i czasem paradoksalne) wyniki zmusiły ich do zdania sobie sprawy, że niektóre metody opracowane do rozwiązywania ważnych, praktycznych problemów prowadzą do niemożliwych do wyjaśnienia skutków. Przykładowo, zgodnie z paradoksem Banacha-Tarskiego, można teoretycznie wziąć kulę i przeciąć ją w taki sposób, że da się złożyć ją z powrotem w dwie identyczne kule, z których każda będzie wielkości pierwotnej bryły. Ponieważ obliczenia są poprawne, wynik Banacha-Tarskiego trzeba było zaakceptować jako prawdziwy, choć wykracza on poza naszą wyobraźnię.

Stało się wtedy jasne, że matematyka może prowadzić do światów, które można zrozumieć tylko za pomocą samej matematyki. Aby mieć pewność, że możemy polegać na odkryciach dokonanych dzięki matematyce (i nieweryfikowalnych innymi sposobami), matematycy zaczęli stosować metody matematyczne „do wewnątrz” i wykorzystywać je do badania tej dziedziny.

Ta introspekcja doprowadziła w połowie XIX w. do przyjęcia kilku różnych nowych koncepcji matematycznych. Akcentu nie kładziono już na przeprowadzanie obliczeń i wyznaczanie wyników, ale na formułowanie i rozumienie abstrakcyjnych koncepcji oraz relacji. Była to zmiana w podejściu od nacisku na *robienie* do nacisku na *rozumienie*. O obiektach matematycznych nie myślano już jak o produkcie stosowania wzorców, ale jak o nośnikach własności konceptualnych. Dowodzenie czegoś nie polegało już na przekształcaniu składników zgodnie z regułami, ale na procesie logicznej dedukcji na podstawie pojęć.

Ta rewolucja — bo do tego doprowadziły opisane zmiany — całkowicie zmieniła sposób myślenia matematyków o ich dyscyplinie. Jednak dla reszty świata ten przełom mógłby równie dobrze nie nastąpić. Po raz pierwszy osoby inne niż zawodowi matematycy dowiedziały się o tych zmianach, gdy nacisk na nowe aspekty został odzwierciedlony w programie studiów. Jeśli Ty, student matematyki, zechcesz wyrazić swoje oburzenie po pierwszym zetknięciu się z „nową matematyką”, możesz mieć pretensje do matematyków takich jak Lejeune Dirichlet, Richard Dedekind, Bernhard Riemann i wszyscy inni, którzy wprowadzali nowe podejście.

Jako przedsmak tego, co Cię czeka, przedstawię jeden przykład omawianych zmian. Do XIX w. matematycy byli przyzwyczajeni do tego, że wzór taki jak $y = x^2 + 3x - 5$ reprezentuje *funkcję*, która generuje nową liczbę y na podstawie podanej liczby x. Potem Dirichlet wystąpił ze swoimi rewolucyjnymi teoriami i stwierdził, że należy zapomnieć o wzorze i skupić się na tym, co funkcja *robi* w kontekście wejść i wyjść. *Funkcja*, według Dirichleta, to dowolna reguła generująca nowe liczby na podstawie istniejących. Reguły nie trzeba przedstawiać za pomocą wzoru algebraicznego. Co więcej, nie ma powodu, aby ograniczać się do liczb. Funkcją może być dowolna reguła, która przyjmuje obiekty jednego rodzaju i generuje na ich podstawie nowe obiekty.

Ta definicja dopuszcza funkcje takie jak ta, zdefiniowana dla liczb rzeczywistych w formie następującej reguły:

Jeśli x to liczba wymierna, $f(x) = 0$;
jeśli x to liczba niewymierna, $f(x) = 1$.

Spróbuj narysować wykres dla tego potwora!

Matematycy zaczęli badać własności funkcji *abstrakcyjnych* tego rodzaju, określonych nie tylko za pomocą wzoru, ale też na podstawie ich zachowania. Przykładowo czy funkcja ma taką własność, że po przekazaniu do niej różnych wartości początkowych zawsze daje inny wynik? (Ta własność to *różnowartościowość*).

To abstrakcyjne, konceptualne podejście okazało się owocne zwłaszcza w rozwoju nowej dziedziny, teorii funkcji rzeczywistych, w ramach której matematycy badali własności ciągłości i różniczkowalności funkcji jako niezależnych abstrakcyjnych koncepcji. Francuscy i niemieccy matematycy opracowali dla ciągłości i różniczkowalności „definicje epsilon-delta", których opanowanie do dziś wymaga od każdego nowego pokolenia studentów matematyki z epoki po analizie matematycznej dużo wysiłku.

W latach 50. XIX w. Riemann zdefiniował funkcje zespolone za pomocą *własności różniczkowalności*, a nie na podstawie wzoru, który uznał za kwestię drugorzędną.

Zdefiniowane przez słynnego niemieckiego matematyka Karla Friedricha Gaussa (1777 – 1855) *klasy reszt*, z którymi zapewne zetkniesz się na kursie algebry, były zwiastunem (obecnie standardowego) podejścia, polegającego na tym, że struktura matematyczna jest definiowana jako zbiór powiązany z określonymi operacjami opisanymi za pomocą aksjomatów.

Dedekind przejął pałeczkę po Gaussie i badał nowe koncepcje *pierścieni*, *ciał* i *ideałów*. Pierścienie, ciała i ideały były zdefiniowane jako kolekcje obiektów powiązanych z określonymi operacjami. Także z tymi zagadnieniami zapewne wkrótce zetkniesz się w ramach edukacji matematycznej wychodzącej poza analizę matematyczną.

A to tylko nieliczne ze zmian.

Zmiany w XIX w., podobnie jak większość rewolucji, miały swoje korzenie w czasach znacznie wcześniejszych niż okres pojawienia się na scenie głównych aktorów. Grecy z pewnością interesowali się matematyką jako dziedziną konceptualną, wykraczającą poza obliczenia, a w XVII w. współtwórca analizy matematycznej, Gottfried Leibniz, głęboko zastanawiał się nad oboma podejściami. Jednak przez większość czasu do XIX w. matematykę postrzegano przede wszystkim jako zestaw procedur rozwiązywania problemów. Dla dzisiejszych matematyków, wychowanych zgodnie z porewolucyjnym podejściem do tej dziedziny, to, co w XIX w. było rewolucją, jest jednak po prostu matematyką. Omawiana rewolucja odbyła się po cichu i w dużym stopniu została zapomniana, jednak okazała się całkowitym przełomem i miała dalekosiężne konsekwencje. Właśnie ona wyznacza scenę dla tej książki, której głównym zadaniem jest zapewnić Ci podstawowe narzędzia umysłowe potrzebne do wkroczenia w nowy świat współczesnej matematyki (a przynajmniej do nauczenia się myślenia matematycznego).

Choć na wykraczającym poza analizę matematyczną poziomie uniwersyteckim matematyka z okresu po XIX w. odgrywa dominującą rolę, nie wywarła ona istotnego wpływu na matematykę w liceum. To dlatego potrzebujesz książki tego rodzaju, aby pomogła Ci dokonać przejścia. Miała miejsce jedna próba wprowadzenia nowego podejścia do klas szkolnych, jednak zupełnie się nie powiodła i szybko trzeba było się z niej wycofać. Chodzi o ruch „Nowej Matematyki" w latach 60. Błąd polegał na tym, że po drodze z wydziałów matematycznych czołowych uniwersytetów do szkół przekaz rewolucjonistów został znacznie zniekształcony.

Dla matematyków z okresu przed połową XIX w. i po tym czasie zawsze ważne były zarówno obliczenia, jak i zrozumienie. Rewolucja z XIX w. oznaczała jedynie zmianę *nacisku* na to, który z tych aspektów stanowi o istocie matematyki, a który pełni rolę pochodną lub pomocniczą. Niestety nauczyciele szkolni w latach 60. odbierali zwykle następujący przekaz: „Zapomnijcie o obliczeniach i skoncentrujcie się tylko na koncepcjach". Ta absurdalna i ostatecznie katastrofalna strategia sprawiła, że satyryk (i matematyk) Tom Lehrer w swojej piosence *New Math* zażartował: „To metoda jest ważna; nie ma znaczenia, że nie otrzymasz prawidłowej odpowiedzi". Po kilku żałosnych latach „Nowa Matematyka" (która, co warto zauważyć, miała już ponad 100 lat) została w dużym stopniu wycofana ze szkolnych programów nauczania.

Charakter polityki edukacyjnej w wolnych społeczeństwach jest taki, że w bliskiej przyszłości wprowadzenie podobnych zmian jest mało prawdopodobne, nawet gdyby przy drugim podejściu zrobiono wszystko prawidłowo. Nie jest też oczywiste (przynajmniej dla mnie), czy taka zmiana byłaby w ogóle korzystna. Edukatorzy utrzymują (co, w obliczu braku twardych dowodów na rzecz którejkolwiek ze stron, jest przedmiotem zaciętych dyskusji), że umysł ludzki musi osiągnąć określony poziom umiejętności w zakresie obliczeń na abstrakcyjnych obiektach matematycznych, zanim będzie mógł wnioskować na temat własności tych obiektów.

1.4. Dlaczego powinieneś opanować ten materiał?

Do tej pory powinno być już jasne, że przejście od podejścia obliczeniowego do koncepcyjnego, jakie nastąpiło w XIX w., było zmianą w społeczności zawodowych matematyków. Interesowali się oni zawodowo samą naturą matematyki. Dla większości naukowców, inżynierów i innych osób, które posługują się metodami matematycznymi w codziennej pracy, sytuacja w zasadzie się nie zmieniła i jest tak do dziś. Obliczenia (i otrzymywanie poprawnej odpowiedzi) pozostają równie ważne jak zawsze, a są wykorzystywane bardziej powszechnie niż kiedykolwiek wcześniej w historii.

Dlatego dla wszystkich osób spoza społeczności matematyków omawiane przejście wydaje się bardziej *rozszerzeniem* dziedziny matematyki niż zmianą nastawienia. Zamiast uczyć się tylko procedur rozwiązywania problemów, studenci matematyki na poziomie uniwersyteckim *także* (czyli *dodatkowo*) powinni opanować podstawowe koncepcje i umieć uzasadnić stosowanie określonych metod.

Czy ten wymóg jest uzasadniony? Choć zawodowi matematycy — których pracą jest rozwijanie nowej matematyki i weryfikowanie jej poprawności — potrzebują takiego konceptualnego zrozumienia, dlaczego wymagać tego od osób, których celem jest kariera, a matematyka jest wyłącznie narzędziem (np. w inżynierii)?

Odpowiedzi są dwie i każda z nich jest w dużym stopniu prawdziwa. (SPOILER: tylko na pozór są to dwie odpowiedzi; po głębszej analizie okazuje się, że chodzi w nich o to samo).

Po pierwsze, edukacja nie polega wyłącznie na zdobywaniu konkretnych narzędzi do wykorzystania w dalszej karierze. Jako jedno z największych osiągnięć ludzkiej cywilizacji matematyka powinna być nauczana razem z naukami ścisłymi, literaturą, historią i naukami pięknymi, aby przekazywać klejnoty naszej kultury z pokolenia na pokolenie. My, ludzie, jesteśmy czymś znacznie więcej niż pracą, jaką wykonujemy, i karierą, jaką robimy. Edukacja jest przygotowaniem do życia, a opanowanie konkretnych umiejętności zawodowych jest tylko jednym z jej aspektów.

Ta pierwsza odpowiedź nie wymaga dalszych uzasadnień. Druga dotyczy kwestii narzędzi odpowiednich do wykonywanej pracy.

Nie ma wątpliwości, że umiejętności matematyczne są niezbędne w wielu zawodach. W większości branż na prawie każdym poziomie wymagania matematyczne okazują się większe, niż się powszechnie sądzi, co wiele osób stwierdza, gdy w trakcie poszukiwania pracy odkrywa brak wiedzy matematycznej.

Przez lata przyzwyczailiśmy się do tego, że rozwój społeczności przemysłowej wymaga siły roboczej posiadającej umiejętności matematyczne. Jeśli jednak przyjrzysz się tej kwestii uważniej, zobaczysz, że te umiejętności należą do dwóch kategorii. Pierwsza z nich to umiejętności ludzi, którzy po zetknięciu z problemem matematycznym (czyli problemem już sformułowanym w kategoriach matematycznych) potrafią znaleźć matematyczne rozwiązanie. Do drugiej kategorii należą umiejętności osób, które potrafią wziąć pod uwagę nowy problem (np. w branży produkcyjnej), zidentyfikować i opisać jego kluczowe aspekty matematycznie, a następnie posłużyć się tym matematycznym opisem do przeanalizowania problemu w precyzyjny sposób.

W przeszłości było duże zapotrzebowanie na pracowników z umiejętnościami typu pierwszego i niewielkie na specjalistów z umiejętnościami typu drugiego. Proces edukacji matematycznej w dużym stopniu zaspokajał obie potrzeby. Jego głównym celem zawsze było „generowanie” osób pierwszego typu, przy czym okazywało się, że niektóre z nich dobrze radziły sobie także z zadaniami drugiego rodzaju. Wszystko więc było w porządku. Jednak we współczesnym świecie, w którym firmy muszą nieustannie wprowadzać innowacje, aby utrzymać się na rynku, rośnie zapotrzebowanie na pracowników typu drugiego, cechujących się umiejętnością myślenia matematycznego — na ludzi, którzy potrafią myśleć niestandardowo w obszarze matematyki. Nagle okazuje się, że nie wszystko jest w porządku.

Zawsze potrzebni będą ludzie dobrze znający różne techniki matematyczne, którzy potrafią pracować samodzielnie przez długi czas i głęboko koncentrować się na konkretnych problemach matematycznych. Nasz system edukacyjny powinien wspierać rozwój takich osób. Jednak w XXI w. bardziej potrzebni będą specjaliści typu drugiego. Ponieważ nie mamy nazwy dla takich osób (określenia „sprawni matematycznie" lub nawet „matematycy" zwykle oznaczają osoby typu pierwszego), proponuję nazwać ich *innowacyjnymi specjalistami w myśleniu matematycznym*.

Pracownicy nowego typu (po prawdzie typ ten nie jest nowy; nie wydaje mi się po prostu, żeby ktokolwiek wcześniej zwrócił na niego uwagę) muszą przede wszystkim dobrze rozumieć matematykę, jej pojęcia, zakres, to kiedy i jak można ją stosować, a także jej ograniczeń. Takie osoby muszą też dobrze opanować pewne podstawowe umiejętności matematyczne. Jednak nie muszą cechować się wybitnym poziomem w tym zakresie. Znacznie ważniejszym wymogiem jest to, by potrafiły dobrze pracować w zespołach (często multidyscyplinarnych), postrzegać rzeczy w nowy sposób, szybko uczyć się i opanowywać potrzebne nowe techniki, a także bardzo sprawnie radzić sobie ze stosowaniem istniejących metod w nowych sytuacjach.

Jak edukować takie osoby? Koncentrujemy się na myśleniu konceptualnym wykraczającym poza konkretne techniki matematyczne. Znasz powiedzenie: „Daj człowiekowi rybę, a zapewnisz mu jedzenie na jeden dzień. Naucz go łowić, a zapewnisz mu pożywienie na całe życie"? To samo dotyczy edukacji matematycznej na potrzeby życia w XXI w. Istnieje tak wiele różnych technik matematycznych (a każdego dnia rozwijane są nowe), że nie da się nauczyć ich wszystkich w trakcie edukacji szkolnej i uniwersyteckiej. Do momentu, gdy student pierwszego roku ukończy studia i podejmie pracę, wiele konkretnych technik, jakie opanuje na uczelni, straci na znaczeniu, a modne staną się nowe rozwiązania. W ramach edukacji trzeba skupić się na uczeniu tego, jak się uczyć.

Rosnąca złożoność matematyki spowodowała, że matematycy w XIX w. zmienili (lub, jeśli wolisz, poszerzyli) pole zainteresowań, przenosząc nacisk z umiejętności obliczeniowych na podstawową umiejętność myślenia konceptualnego. Obecnie, 150 lat później, zmiany w społeczeństwie powodowane po części przez bardziej złożoną matematykę sprawiły, że modyfikacja podejścia stała się istotna nie tylko dla zawodowych matematyków, ale też dla wszystkich, którzy uczą się matematyki z myślą o jej wykorzystaniu w świecie.

Teraz wiesz już nie tylko to, dlaczego matematycy z XIX w. zmienili centrum zainteresowania w obszarze badań matematycznych, ale też to, dlaczego od lat 50. ubiegłego wieku od studentów matematyki oczekuje się opanowania także konceptualnego myślenia matematycznego. Innymi słowy, wiesz teraz, dlaczego uczelnia oczekuje od Ciebie ukończenia kursu przejściowego i zapewne opanowania także materiału przedstawionego w tej książce. Mam nadzieję, że zdajesz też sobie sprawę z tego, dlaczego może to być ważne dla CIEBIE w życiu (a nie tylko przydatne do przetrwania kursów matematycznych na uniwersytecie).

Skorowidz

Z


PROGRAM PARTNERSKI
GRUPY HELION
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ
Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!
Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!
http://program-partnerski.helion.pl
GRUPA Helion

Myślenie matematyczne jest sposobem pojmowania świata, jego elementów i relacji między nimi. To coś zupełnie innego niż rozwiązywanie zadań, wykonywanie operacji i stosowanie procedur. Myślenie matematyczne jest rozwijane przez ludzkość od ponad 3000 lat i przynosi wiele korzyści nie tylko naukowcom. Okazuje się szczególnie ważną umiejętnością w XXI wieku, gdy praktycznie każdy może aspirować do wysokich pozycji w biznesie czy w polityce. Myślenie analityczne jest wysoko cenione wszędzie tam, gdzie mowa o sukcesie, przywództwie, dużych pieniądzach i władzy. Tymczasem płynne przejście z mechanicznego wykonywania operacji matematycznych do prawdziwie matematycznego myślenia wielu osobom sprawia spore problemy.

Ta niewielka książka ma pomóc początkującym studentom matematyki w przestawieniu się na matematyczny sposób myślenia. Została jednak napisana tak przystępnie, że skorzysta z niej każdy, kto zechce się tego nauczyć i opanował szkolne podstawy matematyki. Przedstawiono tu idee i wzorce myślenia, które przyniosą Czytelnikowi wiele korzyści w różnych dziedzinach życia. Materiał został uzupełniony licznymi ćwiczeniami do samodzielnego wykonania, a trudniejsze zagadnienia opatrzono komentarzami. Interesująco ujęta treść zachęca do pracy — i sprawia, że niepostrzeżenie osiąga się cel, którym jest myślenie matematyczne.

W tej książce:

— rola matematyki i myślenia matematycznego we współczesnym świecie
— znaczenie precyzji języka
— dowody i dowodzenie twierdzeń
— twierdzenia dotyczące liczb
— wprowadzenie do teorii mnogości

Dr Keith Devlin jest brytyjskim matematykiem i autorem książek popularyzujących naukę. Od 1987 roku mieszka w USA, pracuje na Uniwersytecie Stanforda w Kalifornii. Jest współzałożycielem uniwersyteckiego instytutu H-STAR i sieci badawczej Stanford Media X. Jego twórczość była wielokrotnie nagradzana — jest znanym popularyzatorem matematyki i logiki. Wśród jego zainteresowań badawczych należy wymienić teorię informacji, modele wnioskowania i stosowanie matematyki w badaniach komunikacji.

Myślenie matematyczne:
klucz do rozwiązania prawie wszystkich problemów!

Helion
helion.pl
HELION SA
ul. Kościuszki 1c
44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
helion@helion.pl

ISBN 978-83-283-4814-1
9 788328 348141
INFORMATYKA W NAJLEPSZYM WYDANIU
Cena: 29,90 zł